Introduzione al modulo di Algebra

Come detto nella presentazione, gli scopi dell'Algebra sono generalizzare, unificare, risolvere.

Essa infatti:

- **fornisce algoritmi, formule di calcolo e concetti di carattere generale, applicabili in svariate circostanze, tra cui la risoluzione di equazioni;**
- **riconosce quello che c'è di simile in situazioni diverse e ne fa uso per guidarci nell'ampliare le nostre conoscenze.**

L'Algebra si presenta inizialmente come un superamento del calcolo aritmetico elementare, nel quale si eseguono solo operazioni su numeri particolari.

Al contrario, attraverso il calcolo letterale, essa insegna a manipolare simboli, le lettere, che potranno assumere poi valori numerici o anche di altro tipo, mantenendo pressoché intatta la validità delle identità ricavate in astratto.

L'Algebra aiuta a formulare le equazioni ed a risolverle in molti casi usando i metodi del calcolo letterale e fornendo così uno strumento potente per costruire modelli matematici di fenomeni reali.

Proprio a seguito dello studio della risolubilità delle equazioni, si introdussero le strutture algebriche, costituite da un insieme e da una o più operazioni, che portano all'unificazione in schemi astratti di una lista di casi particolari, di cui sono messi in luce i tratti essenziali rispetto a quelli accessori.

Si precisa così l'ambito di validità delle identità del calcolo letterale, ossia dell'Algebra classica, e si introducono nuove situazioni in cui alcune di queste identità perdono di significato, mentre ne nascono altre (algebre di Boole, di Lie, …).

Il ruolo delle lettere: variabili o indeterminate?

Le *lettere* nella matematica scolastica entrano dapprima come abbreviazioni o iniziali di parole note:

- talora con significato *univoco* (75 centimetri diventa 75 cm),

- talora con significato *locale* ("Area = base per altezza" diventa A = b×h),

- talvolta con distinzioni tra maiuscole e minuscole.

Esse hanno però sempre un significato "concreto", anche se nel secondo esempio si è già passati ad una identità valida per tutti i rettangoli e non solo per il rettangolo di base 15 cm ed altezza 5 cm.

Si comincia ad intravvedere la differenza tra lettere o gruppi di lettere con significato fisso in un determinato contesto, ossia le costanti, e quelle che non ce l'hanno, le variabili.

Esempi del primo tipo sono:

- **in Fisica, la *h* di Plank, la *c* della velocità della luce, la *m* del metro.**
- **in Geometria, il numero π di Archimede o il numero *e* di Nepero.**
- **in Algebra la lettera danese $\emptyset$ dell'insieme vuoto o la *c* della potenza del continuo.**

Notiamo che la stessa lettera *c* in contesti diversi ha significati diversi.

Inoltre, in un altro contesto, una costante può tornare ad essere variabile:

- **in Geometria dello spazio, π denota spesso un piano generico;**
- **in Algebra, talora e denota l'elemento neutro di un gruppo astratto;**
- **in Fisica, m può denotare la massa di un corpo.**

Persino un simbolo numerico come 1 può denotare qualcosa di più generico, come il *sottogruppo banale* di un gruppo qualsiasi in notazione moltiplicativa.

Nel calcolo letterale, le lettere possono assumere come minimo due significati diversi: variabili o indeterminate.

Le variabili sono elementi non specificati di un determinato insieme, per esempio *numerico,* come l'insieme dei numeri reali, e sono sottoposte a tutte le leggi valide per le operazioni in questo insieme.

Allora "*espressioni*" del tipo a^2, $5a - 2b + 1$, $\frac{b - 1}{a \cdot b}$ hanno un significato univoco: dati i *numeri a, b*, si eseguono le operazioni indicate, ossia la potenza, i prodotti, le somme e differenze, il quoziente, purché il divisore sia diverso da zero.

Dietro questa impostazione si nasconde il concetto di funzione di una o più variabili reali, con il suo apparato di difficoltà e con il suo grafico.

Le *espressioni* sono cioè delle funzioni, che ad ogni valore attribuito alle lettere, preso da un opportuno dominio, restituiscono uno ed un solo numero reale.

Nascono allora anche problemi di unicità della rappresentazione algebrica. Per esempio, per una *funzione polinomiale* occorre un *teorema di identità dei polinomi*.

Le indeterminate invece sono puri simboli, estranei all'ambiente dei numeri, e per poterle manipolare *occorre adottare regole di formazione, postulare alcune identità e ricavarne altre come conseguenza*.

Per esempio, estendiamo l'insieme dei numeri reali aggiungendovi la lettera *a*.

Notiamo che al suo posto potremmo usare una *tacca* o uno *stuzzicadenti* o un *bottone*.

Sarebbe allora più evidente che tutto quel che possiamo fare è riprodurlo e formare delle file: *a*, *aa*, *aaa*, …, *aa…a*, di lunghezza grande a piacere.

Per farci altre cose dobbiamo:

- **introdurre delle convenzioni, per esempio porre** $a^4 = aaaa$ **;**
- **dire che espressioni del tipo** $3a^2$ **oppure** $7 + \frac{3}{4}a - a^3 + 2a^7$ **(i *polinomi*) sono lecite;**
- **postulare o no che si abbia per esempio *3a = a3*,**
- **definire operazioni di *addizione, sottrazione e moltiplicazione* e postulare che queste abbiano proprietà come le omonime operazioni sui numeri reali.**

A questo punto, la scelta delle *regole di formazione* e degli *assiomi* da imporre diviene largamente arbitraria.

Per esempio, se imponessimo anche l'assioma $a^2 = -1$, che cosa otterremmo?

Le espressioni lecite si ridurrebbero alla forma $x+ay$, dove qui x ed y sono *variabili* ed a è l'*indeterminata*.

(Se al posto di a mettiamo i, il tutto ha un aspetto assai più familiare, no?).

Supponiamo di non imporre all'indeterminata proprietà diverse da quelle consuete dei numeri reali.

Per dare significato ad una scrittura del tipo $7+\frac{3}{4}a-a^3+2a^7\left(=7+\frac{3}{4}a\text{-}aaa+2aaaaaaa\right)$**, ossia ad un *polinomio*, dobbiamo immaginare che essa sia una *parola* scritta in un alfabeto comprendente:**

- **i numeri reali rappresentati in qualche modo, per esempio mediante variabili;**
- **i segni + e -;**
- **la lettera *a*.**

L'insieme di queste parole va poi strutturato, inserendovi convenzioni, operazioni e postulandone proprietà.

Notiamo che i segni + e – assumono ciascuno vari significati:

- **elementi dell'alfabeto;**
- **simboli di operazioni tra i numeri reali;**
- **simboli delle nuove operazioni nell'insieme di queste parole, che abbiamo chiamato *polinomi*;**
- **il segno -, inoltre, ha anche il significato di *operatore unario* che fa passare da un elemento all'opposto.**

Occorrerà giustificare l'uso dello stesso simbolo per indicare cose in partenza abbastanza diverse ed abituare gli allievi a farlo senza incertezze.

Credo che quanto precede illustri abbastanza bene la complessità e le complicazioni intrinseche del calcolo letterale, ossia metta in evidenza le difficoltà e le misconcezioni che spesso troviamo negli allievi dei primi anni.

Nessun insegnante si sognerebbe di esporre agli allievi questi ragionamenti sul calcolo letterale, perché nessuno forse capirebbe.

Allora, la scelta è quasi sempre di non parlarne affatto, mischiare ben bene i vari approcci, sperare che gli allievi imparino a svolgere i calcoli per imitazione, e dare del somaro ad un allievo in difficoltà.

Il ruolo delle lettere nelle equazioni: incognite o parametri?

L'idea di equazione si può presentare in vari modi, e per questo basta scorrere i libri di testo.

Una possibile presentazione è la seguente, che la trasforma in un problema:

"date due funzioni *f, g* con lo stesso dominio A e lo stesso codominio B, trovare per quali $x \in A$ si ha $f(x)=g(x)$".

Qui la *x* prende il nome di *incognita*, ossia di variabile della quale si vuol determinare il o i "valori" possibili, secondo la richiesta del problema.

Si mostrano poi metodi risolutivi, di tipo esatto o approssimato a seconda dell'uso e del contesto, sovente ricondotti a formule da imparare a memoria.

Fin qui tutto bene. Il guaio è che, nelle applicazioni pratiche:

a) **si ha a che fare in genere con *funzioni di più variabili*;**
b) **le incognite sono denotate da lettere talora diverse dalla canonica *x* della tradizione scolastica;**
c) **non è allora chiaro che cosa sia "la soluzione" di un'equazione.**

In definitiva, nella pratica non è immediatamente riconoscibile l'incognita e, talora, neppure l'equazione è riconosciuta come tale.

Esempio. Due veicoli viaggiano da Rimini a Bologna in autostrada:

- **il primo proviene da Rimini sud e viaggia a una velocità costante di 120 Km/h;**
- **il secondo parte dal casello di Rimini nord, nel momento in cui transita il primo veicolo, poi accelera costantemente fino a raggiungerlo dopo 15 minuti.**

Che accelerazione ha avuto il secondo veicolo?

Le lettere che compaiono nelle formule di Meccanica sono:

- ***v* per la velocità,**
- ***t* per il tempo,**
- ***s* per lo spazio percorso,**
- ***a* per l'accelerazione.**

I Fisici suggeriscono di operare quanto possibile con le lettere, rinviando alla fine la sostituzione dei loro valori numerici. Seguiamo il loro consiglio e ragioniamo.

- **La prima auto viaggia in moto rettilineo e uniforme, secondo la legge $s=v\cdot t$.**
- **La seconda viaggia con moto uniformemente accelerato e partenza da fermo, secondo la legge $s=\frac{1}{2}a\cdot t^2$.**
- **Lo spazio percorso è lo stesso, dal casello al punto del ricongiungimento, ed ovviamente il tempo trascorso è lo stesso.**

Si ha così, per confronto tra le due espressioni di *s*, l'equazione $\frac{1}{2}a\cdot t^2=v\cdot t$.

Ma è una equazione? Di che grado? Chi è l'incognita? Che ci fanno le altre lettere?

E' facile che un allievo a questo punto non sappia che cosa fare.

Se ci fosse scritto: $\frac{1}{2}x\cdot t^2=v\cdot t$ saprebbe subito ricavare $x=\frac{2a}{b}$ (e se b = 0?).

Nell'uguaglianza $\frac{1}{2}a\cdot t^2=v\cdot t$ però la *x* non c'è, il succedaneo d'incognita più probabile

è certamente la *t* e quindi al massimo qualche allievo ricava $t=\frac{2v}{a}$.

Ma dovevamo trovare l'accelerazione …

La lettera scelta per essere ricavata risolvendo l'equazione si continua a chiamarla incognita, ed allora alle altre si dà talora il nome di *parametri*.

Questi ultimi di norma non sono costanti, e quindi è necessario accertarsi che possano assumere valori tali da rendere risolubile l'equazione rispetto all'incognita da noi prescelta.

Nel nostro esempio, se l'incognita è a, come dovrebbe, si deve avere $t \neq 0$ per l'univocità della soluzione.

Più ci si riflette, più complicazioni si ritrovano …

Si può evitare l'accusa di far parte di un *Ufficio Complicazione Cose Semplici*?

Un insegnamento che si chiama "Elementi di Algebra da un punto di vista superiore" sembra proprio uscire da tale ufficio!

Eppure, talora siamo noi insegnanti a ritenere semplici dei concetti che non lo sono affatto, o a far diventare complicati altri che in realtà forse non lo sarebbero.

Del primo tipo sono le nozioni di angolo, poligono, polinomio, frazione algebrica, equazione, il segno -, il segno =.

Del secondo tipo è, forse, a tempo debito, il concetto di integrale.

Credo che si possa riuscire ad evitare che l'Algebra sia vista o come un insieme arido di formule e calcoli inutili ed incomprensibili, o come un terreno minato, in cui ogni concetto oscilla pericolosamente tra significati talora opposti. Vediamo tre considerazioni.

- **L'Algebra sembra talora astrusa perché non diamo le informazioni giuste agli allievi.**
- **Dare risposte a domande non poste è spesso didatticamente infruttuoso. La Matematica nel suo complesso può correre questo rischio, e l'Algebra in particolare.**
- **La complicazione è quasi sempre indispensabile, ma penso vada preparata e inserita quando serve, per dare le risposte giuste quando altri approcci sono inutili.**

Esempio. Se rappresentiamo i numeri naturali come *file di tacche*, le operazioni sono semplici, le proprietà abbastanza evidenti, l'ordinamento è intuitivo.

Tuttavia, per scrivere il numero dei cittadini di Roma occorre tracciare milioni di tacche. Dove? Su che supporto? Come controllare?

Allora il ben più efficiente sistema posizionale in base 10 diventa una liberazione: numeri grandi scritti in poco spazio, calcoli non difficili, ordinamento comprensibile.

Tutto a posto? Non ancora.

Con i numeri naturali nasce l'idea di *successione* e di *serie*.

Per esempio, c'è una formula in funzione di *n* per calcolare $\sum_{k=0}^{n} k^2$ e che eviti tutte quelle addizioni? Come essere certi che sia vera per ogni n?

Ecco allora la necessità di una descrizione globale dei numeri naturali attraverso un *sistema di assiomi*, tra cui il *principio d'induzione*, e di *regole di formazione*, con cui ricostruire ciò che sappiamo già, ma anche scoprire e dimostrare altre proprietà, come per esempio l'identità $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$ o l'infinità dei numeri primi.